Thetafunktionen

im

reellen, quadratischen Körper.

Verkürzte Fassung der

INAUGURAL-DISSERTATION

zur Erlangung der Doktorwürde

der hohen philosophischen Fakultät der Universität Basel

vorgelegt von

PAUL BUCHNER

aus Basel.

Basel 1919

Buchdruckerei Emil Birkhäuser & Cie.

Thetafunktionen

im

reellen, quadratischen Körper.

Verkürzte Fassung der

INAUGURAL-DISSERTATION

zur Erlangung der Doktorwürde

der hohen philosophischen Fakultät der Universität Basel

vorgelegt von

PAUL BUCHNER

aus Basel.

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Basel 1919

Buchdruckerei Emil Birkhäuser & Cie.

Genehmigt von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Abteilung der philosophischen Fakultät auf Antrag der Herren Professoren Dr. *E. Hecke* und Dr. *O. Spiess*.

Basel, den 12. Juli 1918.

Prof. Dr. **A. L. Bernoulli,** Dekan.

Herrn P. Buchner wurde von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Abteilung der Philosophischen Fakultät der Universität Basel am 12. Juli 1918 erlaubt, eine verkürzte Fassung seiner Inaugural-Dissertation drucken zu lassen. Das ganze Manuskript der Dissertation ist Eigentum der Math.-Naturwissenschaftlichen Abteilung und kann daselbst eingesehen oder entliehen werden.

Einleitung.

Die Theorie der Thetafunktionen hat, durch die zahlreichen ihr gewidmeten Arbeiten, Ende des vorigen Jahrhunderts eine abschliessende Behandlung erfahren[1]). Hilbert[2]) wirft dann das Problem auf, für die algebraischen Zahlkörper Funktionen zu finden, die für diese von ebensolcher Bedeutung wären, wie die Exponentialfunktion für den gewöhnlichen Rationalitätsbereich. In Verfolgung dieses Zieles gelangt Hilbert zu einer Erweiterung der elliptischen Modulfunktionen auf Modulfunktionen von n-Variablen, die mit den Thetafunktionen in Zusammenhang stehen. Ausgehend von diesen Ansätzen zeigt Herr Blumenthal[3]), dass, wenn man die $\frac{n(n+1)}{2}$ Moduln einer Thetafunktion als lineare Funktionen von n-Variablen ansetzt, es rationale Funktionen von Thetanullwerten gibt, welche Funktionen der Modulgruppe dieser n-Variablen sind. Herr Hecke[4]) untersucht diese Funktionen für den Fall zweier Variablen und zeigt, dass diese Funktionen in der Tat zahlentheoretische Eigenschaften von prinzipieller Bedeutung besitzen, welche zu denen der elliptischen Modulfunktionen in Analogie stehen. Weiterhin zeigt Herr Hecke[5]), dass Problemstellung und Durchführung erheblich an Durchsichtigkeit gewinnen,

---

1) Martin Krause. Die Transform. der hyperell. Fkt. Lpz. 1882. Adolf Krazer. Lehrbuch der Thetafunkt. Lpz. 1903.

2) Göttinger Nachrichten 1900, p. 279. Problem 12.

3) Math. Ann. 56, p. 509, und 58, p. 497; Jahresb. d. deutsch. Mat. Ver., Bd. 13, 1904, p. 120.

4) Math. Ann. 71, p. 1, und Bd. 74, p. 465.

5) Göttinger Nachr. 1915, p. 1. Ueber die Perioden vierfach periodischer Funktionen.

falls man von den allgemeinsten vierfach periodischen Funktionen ausgeht, statt von den speziellen Jakobischen Umkehrfunktionen vom Geschlechte zwei. Es wird die Theorie der allgemeinsten Perioden vierfach periodischer Funktionen unter Zuhilfenahme einer geometrischen Interpretation erledigt und die Probleme aufgeworfen, mit denen sich vorliegende Arbeit, auf Anregung von Herrn Hecke, befasst.

Eine Funktion einer Variablen u mit 2 unabhängigen Perioden x und y, etwa eine elliptische Funktion erster Art, genügt den Funktionalgleichungen

$$\psi(u + x) = \psi(u + y) = \psi(u).$$

Die allgemeinste Periode ist dann von der Form

$$ax + by,$$

wo a, b ganze, rationale Zahlen sind. Analog betrachten wir Funktionen zweier Variablen u und v mit vier Periodenpaaren. Es seien x, y, x', y' unbestimmte Grössen. Das allgemeinste Periodenpaar soll dann durch

$$\alpha x + \beta y \qquad \alpha' x' + \beta' y'$$

gegeben sein, worin α und β ganze algebraische Zahlen eines bestimmten reellen quadratischen Körpers seien. α', β' bedeuten die konjugierten Grössen. Im folgenden sollen Funktionen eines derartigen Periodizitätsschemas betrachtet werden, doch verallgemeinern wir in der Hinsicht, dass wir in Analogie zu den von Ch. Hermite [1]) eingeführten elliptischen Funktionen dritter Art

$$\psi(u + x) = e^{2\pi i(\mu_1 u + \nu_1)}\,\psi(u) = \text{Exp.}\left\{2\pi i(\mu_1 u + \nu_1)\right\}\psi(u)$$
$$\psi(u + y) = \text{Exp.}\left\{2\pi i(\mu_2 u + \nu_2)\right\}\psi(u)$$

vorgehen. Wir werden solche Funktionen, wie H. Weber [2]), T-Funktionen heissen.

Lange vor Hilbert ist Picard [3]), allerdings nur für den speziellen Fall n = 2, beim Studium seiner »Groupes hyperabéliens«

[1]) »Sur quelques applications d. f. ellipt.« Comptes Rendus 85–94 (1877–82).
[2]) H. Weber. Algebra. Bd. 3, 1908, p. 60.
[3]) Journal de Mathématiques. 4e Série. Tome 1. 1885. p. 87.

zu hieher gehörigen Funktionen gelangt. Auf seine Veranlassung hin hat Bourget [1]) in seiner Thèse einen Fall genauer untersucht. Er betrachtet Thetafunktionen, deren Moduln der singulären Relation

$$\tau_2^2 - \tau_1\tau_3 = D$$

genügen und untersucht insbesondere die Gruppe dieser Funktionen. Herr Humbert [2]) stellt dann diese Untersuchungen auf die allgemeinste Basis, indem er T-Funktionen, oder in seiner in Anschluss an Briot und Bouquet [3]) gewählten Bezeichnungsweise: »fonctions intermédiaires«, untersucht, deren Moduln einer oder mehreren singulären Relationen der allgemeinsten Art

$$A\tau_1 + B\tau_2 + C\tau_3 + D\left(\tau_2^2 - \tau_1\,\tau_3\right) + E = 0$$

genügen, und eingehend behandelt.

Herr Hecke hatte die Freundlichkeit, mich noch auf eine hiehergehörige Arbeit von Herrn Cotty [4]) aufmerksam zu machen.

Unabhängig von diesen frühern Arbeiten griff dann Hilbert das vorliegende Problem in voller Allgemeinheit auf.

Im folgenden sollen nun zu einem allgemeinen Periodenschema gehörige T-Funktionen untersucht werden. Es erweist sich hiebei eine zahlentheoretische Behandlungsweise als die dem vorliegenden Gegenstand gemässe. Die Arbeiten von Humbert drängen die Anwendung der Körpersprache, welche er noch vermeidet, direkt auf. Bei unseren Beweismethoden spielt der Idealbegriff eine wesentliche Rolle. Wir fragen, ob es Funktionen vom Charakter der T-Funktionen mit

$$\alpha\,x + \beta\,y \qquad \alpha'\,x' + \beta'\,y'$$

als Periodensystem gibt. Diese Funktionen werden durch Funktional- und Differentialgleichungen definiert und daraus ihre Fouriersche Entwicklung abgeleitet.

---

1) Henry Bourget. Thèses. Sur une classe part. de Groupe Hyperab. Paris 1898.

2) Journal de Mathématiques. 5e Série. Tome 5, 6, 9, 10. 6e Série, Tome 2. 1899—1906.

3) Briot et Bouquet. Fonctions ellipt. 1875. p. 236.

4) G. Cotty. Les fonctions abéliennes et la théorie des nombres. Toulouse Ann. (3). 3. 1913. p. 209—374.

Damit ist das Material gegeben, um im nächsten Abschnitt den Existenzbereich dieser Funktionen zu ermitteln. Danach wird das Kriterium, um T-Funktionen von paarigem Charakter zu erkennen, angegeben. Von Wichtigkeit ist das Verhalten bei halben Periodensubstitutionen und der Zusammenhang mit den singulär spezialisierten Thetafunktionen.

In einem weitern Paragraphen wird die Formel für die Transformation der Periodizitätsmoduln angegeben. Die Zahlen dieser Transformationen sind durch Kongruenzen definiert und diese Substitutionen bilden in ihrer Gesamtheit eine Gruppe, deren Struktur eingehend untersucht wird. Insbesondere wird gezeigt, dass die Gruppe eine endliche Basis besitzt. Es wird alsdann die Anzahl der inäquivalenten Substitutionen dieser Gruppe bestimmt, wobei Transformationen derselben Determinante, die unimodular aufeinander bezogen werden können, äquivalent heissen.

Während es möglich ist, die Thetafunktionen höherer Ordnung sämtlich ganz, rational durch die Thetafunktionen erster Ordnung, auszudrücken, ergibt sich, auf Grund unserer Untersuchungen, dass dies in gleicher Weise bei den T-Funktionen nicht möglich ist. Vielmehr sind zwei Funktionstypen nötig, um jede T-Funktion, oder wenigstens eine gewisse Potenz davon, rational aufzubauen. Es wird ein Prinzip angegeben, wonach jede T-Funktion rational aus den beiden Grundfunktionen erzeugt werden kann. Dadurch ist auch die Multiplikation erledigt, indem $T(\nu u)$ ebenfalls durch die Grundfunktionen darstellbar wird. Hierzu wird ein Beispiel angegeben. Man gelangt so in jedem Körper zu Relationen zwischen den spezialisierten Thetafunktionen. Humbert hat bereits für die Thetanullwerte solche Relationen aufgestellt.

§ 1. Die T-Funktion.

Nachdem Herr Hecke[1]) die Theorie der Periodensysteme vierfach periodischer Funktionen erledigt hat, sollen hier dazugehörige Funktionen einer Betrachtung unterworfen werden.

[1]) Vergleich hiezu Anm. 5, p. 1.

Es seien die reellen oder komplexen Grössen

$$1) \qquad \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix}$$

die Perioden einer vierfach periodischen Funktion T (u, v). Die Determinanten zweiter Ordnung dieser Matrix 1) bezeichnen wir mit $p_{ik} = u_i v_k - u_k v_i$. Wir betrachten nur Funktionen T (u, v), die zu singulär oder einfach spezialisierten Perioden gehören. Darunter verstehen wir solche Perioden, deren Unterdeterminanten p_{ik} zwei ganzzahligen Gleichungen,

$$2) \qquad A \equiv \sum_{i,k=1}^{4} a_{ik}\, p_{ik} = 0, \quad B \equiv \sum_{i,k=1}^{4} b_{ik}\, p_{ik} = 0$$

genügen, worin die ganzen, rationalen Zahlen

$$a_{ik} = -a_{ki}, \quad b_{ik} = -b_{ki}$$

je nicht sämtlich verschwinden. Durch die simultane Transformation Q

$$u_i = \sum_{m=1}^{4} q_{im}\, u'_m; \quad v_i = \sum_{m=1}^{4} q_{im} v'_m \qquad (i = 1, \ldots, 4)$$

mit ganzen, rationalen Zahlen q_{im} gehen unsere Perioden u_i, v_i über in u'_i, v'_i, die wiederum ganzzahligen Gleichungen genügen, deren Koeffizienten aus dem Matrizenkalkül folgen. Die Matrix von A besitzt dabei die Invariante

$$a = a_{12}\, a_{34} + a_{13}\, a_{42} + a_{14}\, a_{23}$$

und entsprechend B eine Invariante b.

Fasst man u_i und v_i als homogene Punktkoordinaten auf, so legen sie eine »Periodengerade« fest, deren Plückersche Koordinaten gerade die p_{ik} sind. Die Gleichungen 2) repräsentieren dann zwei ganzzahlige, lineare Komplexe, die der linearen Schar $Ax_1 + Bx_2$ angehören, deren gemeinsame Elemente eine lineare Kongruenz bilden. Dieser Komplex $Ax_1 + Bx_2$ besitzt als Invariante den Ausdruck

$$F(x_1, x_2) = a x_1^2 + J\, x_1\, x_2 + b\, x_2^2,$$

wo J eine Simultaninvariante von A und B bedeutet. Unsere Periodengerade gehört dann zu den gemeinsamen Elementen der

Schar, also zur Kongruenz. Ohne die Allgemeinheit zu stören, dürfen die diese Kongruenz erzeugenden linearen Komplexe in einfacher Normalgestalt

$$3) \qquad A \equiv -a p_{13} + p_{24} = o, \quad B \equiv b p_{14} - J p_{13} + p_{23} = o$$

angenommen werden. Die ganzen Zahlen a, b und J setzen wir als zueinander prim voraus. Sollen nun Funktionen vom verlangten Typus existieren, so muss eine gewisse Hermitesche Form definit sein oder geometrisch darf keine Periodengerade von einer reellen Geraden der Komplexe 3) getroffen werden. Daraus folgert Herr Hecke, dass die Diskriminante

$$d = J^2 - 4\,ab$$

positiv ist. Um keine Ausartungsfälle zu erhalten, nehmen wir d immer als von einer Quadratzahl verschieden an. Setzt man

$$4) \qquad \omega = \frac{J - \sqrt{J^2 - 4\,ab}}{2} = \frac{J - \sqrt{d}}{2}; \quad \omega' = \frac{J + \sqrt{d}}{2},$$

wobei stets das positive Zeichen der Wurzel zu nehmen ist, so lassen sich die durch die ganzzahligen Komplexe 3) charakterisierten Periodensysteme auf die Form

$$u_i = \alpha_i\, x + \beta_i\, y \qquad v_i = \alpha_i'\, x' + \beta_i'\, y'$$

bringen. α_i, β_i sind ganze Zahlen des reellen Körpers $\sqrt{d}$. Die gestrichenen Grössen mögen stets die Konjugierten bezeichnen. x, x', y, y' bezeichnen komplexe Unbestimmte.

Die Zahl ω bestimmt im Körper $\sqrt{d}$ einen Ring R. Die Zahlen 1, ω bilden eine Basis von R. In diesem Ring ist

$$\mathfrak{a} = (a,\ \omega')$$

ein Ringideal, derart, dass

$$a = \mathfrak{a}\,\mathfrak{a}'$$

wird. Es ist

$$5) \quad \omega\,\omega' = ab, \quad J = \omega + \omega', \quad \omega' = \mathfrak{a}j, \quad (\mathfrak{a}', j) = 1, \quad \Delta = \omega' - \omega = \sqrt{d} > o.$$

Unsere Funktionen der Variablen u, u' sollen die Perioden

$$u\colon \alpha x + \beta' y \qquad u'\colon \alpha' x' + \beta y'$$

besitzen. Es bedeute α stets eine ganze Zahl aus R, β eine ganze, durch $\mathfrak{a}'$ teilbare Zahl in R. Wir bezeichnen nun exakter jede ganze Funktion, die für jedes α, β identisch in u, u', x, y, x', y' den widerspruchsfreien Funktionalgleichungen

$$T\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{bmatrix}(u+\alpha x,\ u'+\alpha' x') = \mathrm{Exp.}\left\{\frac{\pi i}{\Delta}\,(\alpha\lambda'_1-\alpha'\lambda_1)\right\} T\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{bmatrix}(u, u')$$

6)
$$T\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{bmatrix}(u+\beta' y,\ u'+\beta y') = \mathrm{Exp.}\left\{\frac{\pi i}{a\Delta}\,(\beta\lambda'_2-\beta'\lambda_2)\right.$$
$$\left.-\frac{\pi i}{\Delta}\left[(2u+y\beta')\,\frac{\beta'\Omega'}{x}-(2u'+y'\beta)\,\frac{\beta\Omega}{x'}\right]\right\}\ T\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{bmatrix}(u, u')$$

genügt, als T-Funktion der *Charakteristik* $\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{bmatrix}$ und dem *Index* Ω und möge mit

$$T\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{bmatrix}(u, u';\ \mathfrak{a};\ \Omega;\ x;\ y)$$

bezeichnet werden. λ_1 und λ_2 sind ganze, von α, β; u, u'; x, x', y, y' unabhängige Zahlen aus R, und ausserdem λ_2 durch $\mathfrak{a}'$ teilbar. Ω ist eine solche Zahl aus R, dass $\mathfrak{a}'\,\Omega$ ganz ist. Die T-Funktion ist aber durch diese Funktionalgleichungen keineswegs eindeutig bestimmt. Eindeutig festgelegt wird, als Faktor von u, der Index Ω und das Ideal $\mathfrak{a}$. Die Charakteristik kommt nur modulo 2, resp. $2\mathfrak{a}$, für die Funktionalgleichung in Frage.

Wenn $T\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{bmatrix}(u, u';\ \mathfrak{a};\ \Omega;\ x, y)$ existiert, so lässt sie sich, als ganze Funktion, in eine Fouriersche Reihe entwickeln. Macht man, entsprechend der ersten Funktionalgleichung, den Ansatz

$$T\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{bmatrix}(u, u') = \sum_{\mu} c_\mu\ \mathrm{Exp.}\left\{\frac{\pi i}{\Delta}\left[\frac{u}{x}(2\mu'+\lambda'_1)-\frac{u'}{x'}(2\mu+\lambda_1)\right]\right\},$$

wo über alle ganzen Zahlen μ des Ringes R zu summieren ist; so werden durch die zweite Funktionalgleichung 6) die Koeffizienten c_μ mit $c_{\mu+\beta\Omega}$ verknüpft. Jeder Restklasse nach dem Modul $\mathfrak{a}'\,\Omega$ entspricht genau eine T-Funktion, deren es also

$$\mathrm{Norm}\ \mathfrak{a}'\Omega = \mathfrak{a}'\frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{a}'}\cdot\mathfrak{a}\frac{\mathfrak{c}'}{\mathfrak{a}} = \mathfrak{c}\mathfrak{c}' = \mathfrak{N}$$

verschiedene gibt. Ist

$$N = \Omega\Omega' = \frac{cc'}{a}$$

und bezeichnen wir mit μ_0 die Repräsentanten dieser Restklassen, so folgt für die zugeordnete T-Funktion

$$T\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{bmatrix}_{\mu_0}(u, u'; \mathfrak{a}; \Omega; x, y) = \sum_{\sigma} \operatorname{Exp.}\left\{-\frac{\pi i}{a\Delta}\left[\sigma\lambda'_2 - \sigma'\lambda_2\right]\right.$$

$$7) \quad + \frac{\pi i}{\Delta}\left[\frac{2u + y\sigma'}{x}\left(\mu_0' + \sigma'\Omega' + \frac{\lambda'_1}{2}\right) - \frac{2u' + y'\sigma}{x'}\left(\mu_0 + \sigma\Omega + \frac{\lambda_1}{2}\right)\right]$$

$$+ \frac{\pi i}{\Delta}\left[\frac{y}{x}\sigma'\left(\mu_0' + \frac{\lambda'_1}{2}\right) - \frac{y'}{x'}\sigma\left(\mu_0 + \frac{\lambda_1}{2}\right)\right] + \frac{\pi i}{N\Delta}\left[\frac{y}{x}\left(\mu_0' + \frac{\lambda'_1}{2}\right)^2\Omega\right.$$

$$\left.\left. - \frac{y'}{x'}\left(\mu_0 + \frac{\lambda_1}{2}\right)^2\Omega'\right]\right\},$$

wo über alle ganzen, durch $\mathfrak{a}'$ teilbaren Zahlen σ in R zu summieren ist. Für unsere Untersuchungen ist es vielfach bequem

$$u = vx, \quad u' = v'x'; \quad \frac{y}{x} = \tau, \quad \frac{y'}{x'} = \tau'$$

zu setzen.

Durch die Funktionalgleichungen 6) ist die Schar der $\mathfrak{N}$ T-Funktionen nur bis auf willkürliche Funktionen von τ und τ' bestimmt, die wir dadurch festlegen, dass wir verlangen, unsere T-Funktionen sollen den Differentialgleichungen

$$8) \quad \frac{\partial^2 T\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{bmatrix}(v, v'; \mathfrak{a}; \Omega; \tau, \tau')}{\partial v^2} = \frac{4\pi i}{\Delta}\Omega\frac{\partial T\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{bmatrix}(v, v'; \mathfrak{a}; \Omega; \tau, \tau')}{\partial \tau}$$

$$\frac{\partial^2 T\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{bmatrix}(v, v'; \mathfrak{a}; \Omega; \tau, \tau')}{\partial v'^2} = -\frac{4\pi i}{\Delta}\Omega'\frac{\partial T\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{bmatrix}(v, v'; \mathfrak{a}; \Omega; \tau, \tau')}{\partial \tau'}$$

genügen. Die allgemeinste T-Funktion ist dann gegeben durch

$$9) \quad T\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{bmatrix}(v, v'; \mathfrak{a}; \Omega; \tau, \tau') = \sum_{\mu_0} c_{\mu_0} T\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{bmatrix}_{\mu_0}(v, v'; \mathfrak{a}; \Omega; \tau, \tau'),$$

wo über ein volles Restsystem nach dem Modul $\mathfrak{a}'\Omega$ zu summieren ist und die Koeffizienten c_{μ_0} von v, v', τ und τ' unabhängig sind. Daraus folgt, *dass die Funktionen 7)* $\mathfrak{N}$ *linear unabhängige*

T-Funktionen vom Index Ω der Charakteristik $\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{bmatrix}$ sind, durch die sich jede T-Funktion von demselben Index und gleicher Charakteristik mittels von u, u', τ und τ' unabhängiger Koeffizienten darstellen lässt.

§ 2. Existenz der T-Funktion.

Der für die Konvergenz wesentliche Bestandteil der Reihe 7) ist der reelle Koeffizient des quadratischen Summationsindexes

$$\frac{\pi i}{\Delta}\left\{\tau\sigma'^2\Omega' - \tau'\sigma^2\Omega\right\}.$$

Beachtet man, dass die Körperzahlen reell sind und trennt man τ in seinen reellen und imaginären Teil

$$\tau = \tau_1 + i\tau_2\,,\quad \tau' = \tau'_1 + i\tau'_2,$$

so folgt als notwendige und hinreichende Bedingung für die Konvergenz der Reihe, die dann zugleich eine absolute ist, $\tau_2 > 0$; $\tau_2' < 0$ und Ω total positiv.

Daraus entnehmen wir den Satz:

Ist Ω eine solche total positive Zahl des Körpers, dass $\mathfrak{a}'\Omega$ ganz ist, so ist jede ganze Funktion vom Index Ω und der Charakteristik $\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{bmatrix}$, welche den Funktionalgleichungen 6) und den Differentialgleichungen 8) genügt, durch die $\mathfrak{N}$ linearunabhängigen Funktionen 7), im Teilraum $\tau_2 > 0$, $\tau_2' < 0$, mit von τ, τ' unabhängigen Koeffizienten darstellbar.

Es ist nun von Wichtigkeit zu entscheiden, wann unsere T-Funktionen gerade oder ungerade Funktionen ihrer Argumente sind. Aus 7) folgt

$$T\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{bmatrix}_{\mu_0}(-v, -v') = T\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{bmatrix}_{-\mu_0-\lambda_1}(v, v').$$

Ersetzt man μ_0 durch eine nach dem Modul $\mathfrak{a}'\Omega$ dazu kongruente Zahl $\mu_0 - \nu\Omega$, so ist

$$T\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{bmatrix}_{\mu_0-\nu\Omega}(v, v') = \mathrm{Exp.}\left\{-\frac{\pi i}{a\Delta}(\nu\lambda'_2 - \nu'\lambda_2)\right\} T\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{bmatrix}_{\mu_0}(v, v').$$

Die ganze Zahl ν kommt hierin nur Modulo $2\mathfrak{a}'$ in Frage. Ist nun $-\mu_0-\lambda_1$ von der Form $\mu_0-\nu\Omega$ oder

$$2\mu_0+\lambda_1 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{c}},$$

so ergeben diese 2 Gleichungen

10)
$$T\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{bmatrix}_{\mu_0}(-v, -v') =$$
$$\text{Exp.}\left\{-\frac{\pi i}{\Delta}\left[\lambda'_2\,(2\mu_0+\lambda_1)\,\frac{\Omega'}{Na}-\lambda_2\,(2\mu_0'+\lambda'_1)\,\frac{\Omega}{Na}\right]\right\} T\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{bmatrix}_{\mu_0}(v, v')$$

und die T-Funktion der Restklasse μ_0 ist gerade oder ungerade. Ist aber

$$2\mu_0+\lambda_1 \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{c}},$$

so ist die zugehörige Funktion $T\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{bmatrix}_{\mu_0}(v, v')$ weder eine gerade noch eine ungerade Funktion ihrer Argumente; hingegen sind dann die Funktionen

$$T_i\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{bmatrix}_{\mu_0}(v, v') = T\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{bmatrix}_{\mu_0}(v, v') \pm T\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{bmatrix}_{\mu_0}(-v, -v') \qquad (i = 1, 2)$$

gerade oder ungerade und von jeder Art gleichviel.

Wir ermitteln noch die Anzahl der T-Funktionen von paarigem Charakter.

I. Die Charakteristik sei die Uneigentliche $\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$. Der Exponentialfaktor in 10) verschwindet, d. h. es kann nur gerade Funktionen geben. Damit dies eintrifft, muss

$$2\mu_0 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{c}}$$

sein.

1. Das Ideal (2) sei relativ prim zu $\mathfrak{c}$, dann ist für ein einziges μ_0 die obige Kongruenz erfüllt, d. h. es existiert eine gerade Funktion $T[0]_{\mu_0}(v, v')$.

2. (2) habe mit $\mathfrak{c}$ den Idealfaktor $\mathfrak{p}$ gemein. Die obige Kongruenz hat dann genau Norm $(\mathfrak{p})$ Lösungen und dementsprechend gibt es 2 oder 4 gerade T-Funktionen, je nachdem Norm $(\mathfrak{p})$ zwei oder vier ist.

II. Die vorgelegte Charakteristik sei eine Eigentliche. Für paarige Funktionen muss

$$2\,\mu_0 + \lambda_1 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{c}}$$

sein.

1. (2) sei prim zu $\mathfrak{c}$, dann wird $2\mu_0$ ein einziges Mal der Zahl $-\lambda_1$ kongruent. Die zugehörige Funktion $\mathrm{T}\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{bmatrix}_{\mu_0}(\mathrm{v}, \mathrm{v}')$ ist dann gerade oder ungerade, je nachdem der Exponentialfaktor in 10) $+1$ oder -1 ist.

2. Besitzt (2) mit $\mathfrak{c}$ den Faktor $\mathfrak{p}$ gemein, so hat die Kongruenz nur Lösungen, falls λ_1 durch $\mathfrak{p}$ teilbar ist. Ist diese notwendige Bedingung erfüllt, so hat die Kongruenz gleich Norm $(\mathfrak{p})$ Lösungen. Ob die zugehörigen Funktionen gerade oder ungerade sind, entscheidet wiederum 10).

Für das Verhalten bei halben Periodensubstitutionen folgt aus der Reihenentwicklung 7) durch einfache Umformung

$$11)\quad \mathrm{T}\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{bmatrix}_{\mu_0}\left(\mathrm{v}+\frac{\varrho}{2}+\tau\frac{\nu'}{2},\ \mathrm{v}'+\frac{\varrho'}{2}+\tau'\frac{\nu}{2}\right)=\mathrm{Exp.}\left\{-\frac{\pi\mathrm{i}}{\Delta}(\mathrm{v}\,\nu'\Omega'-\mathrm{v}'\,\nu\Omega)\right.$$
$$\left.+\frac{\pi\mathrm{i}}{\Delta}\left[\varrho\left(\mu_0'+\frac{\lambda_1'}{2}\right)-\varrho'\left(\mu_0+\frac{\lambda_1}{2}\right)\right]-\frac{\pi\mathrm{i}}{\Delta}\left[\tau\frac{\nu'^2}{4}\Omega'-\tau'\frac{\nu^2}{4}\Omega\right]\right\}$$
$$\mathrm{T}\begin{bmatrix}\lambda_1+\nu\,\Omega\\ \lambda_2+\varrho\mathfrak{a}\,\Omega'\end{bmatrix}_{\mu_0}(\mathrm{v},\ \mathrm{v}'),$$

wenn ϱ eine ganze Zahl und ν' eine ganze, durch $\mathfrak{a}$ teilbare, Zahl aus R bedeutet.

Sind $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ ganze, durch $\mathfrak{a}'$ teilbare Zahlen des Ringes, so ergibt sich durch direkte Umformung

$$12)\quad \mathrm{T}\begin{bmatrix}\lambda_1+2\,\varkappa_1\,\Omega\\ \lambda_2+2\,\varkappa_2\end{bmatrix}_{\mu_0}(\mathrm{v},\mathrm{v}')=\mathrm{Exp.}\left\{\frac{\pi\mathrm{i}}{\mathfrak{a}\Delta}(\varkappa_1\lambda'_2-\varkappa'_1\lambda_2)\right\}\mathrm{T}\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{bmatrix}_{\mu_0}(\mathrm{v},\mathrm{v}').$$

Es kann demnach λ_1 Modulo $2\,\mathfrak{c}$ und λ_2 nach $2\mathfrak{a}'$ reduziert werden. Geht man zu einer Funktion einer andern Restklasse über, so kann λ_1 auch mod. 2 reduziert werden:

$$\mathrm{T}\begin{bmatrix}\lambda_1+2\,\varkappa_3\\ \lambda_2\end{bmatrix}_{\mu_0}(\mathrm{v},\mathrm{v}')=\mathrm{T}\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{bmatrix}_{\mu_0+\varkappa_3}(\mathrm{v},\mathrm{v}')=\mathrm{T}\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{bmatrix}_{\mu_1}(\mathrm{v},\mathrm{v}'),$$

falls $\varkappa_3$ eine ganze Zahl aus R ist und

$$\mu_0 + \varkappa_3 \equiv \mu_1 \pmod{\mathfrak{c}}.$$

Man kommt demnach mit den $\mathfrak{N}$, den Restklassen nach $\mathfrak{c}$ entsprechenden, Funktionen und 16 Charakteristiken aus. Statt dessen könnte man auch bei einer Restklasse bleiben und λ_1 nur Modulo $2\,\mathfrak{c}$ reduzieren.

In unseren T-Funktionen sind die gewöhnlichen, natürlich singulär spezialisierten ϑ-Funktionen enthalten. Sie entsprechen der Hauptidealklasse $\mathfrak{a} = (1)$. Als Index sind nur noch ganze rationale Zahlen $\Omega = k$ zulässig. Für die Charakteristik ist zu setzen

$$\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}g_1\omega + g_2\\ g_3 \quad + g_4\omega\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}g_1 & g_2\\ g_3 & g_4\end{bmatrix}.$$

Um ausserdem das für die Thetafunktionen übliche Periodizitätsschema zu erhalten, hat man die homogene Variablentransformation

$$v = V + \omega V', \quad v' = V + \omega' V'$$

vorzunehmen. Es geht dann 6) unmittelbar in die Funktionalgleichung der Thetafunktionen k^{ter} Ordnung über, wenn

$$\tau_1 = \frac{p_{32}}{p_{12}} = \frac{\tau\omega'^2 - \tau'\omega^2}{\Delta}; \quad \tau_2 = \frac{p_{13}}{p_{12}} = \frac{\tau\omega' - \tau'\omega}{\Delta}; \quad \tau_3 = \frac{p_{14}}{p_{12}} = \frac{\tau - \tau'}{\Delta}$$

gesetzt wird. Als singulär spezialisierte Thetafunktionen genügen die Moduln der ganzzahligen Relation 3)

$$B \equiv \tau_1 + J\,\tau_2 \;-\; b\tau_3 = 0.$$

Für $k = 1$ gilt

$$T\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{bmatrix}_0 (v, v'; 1; 1; \tau, \tau') = \text{Exp.}\left\{-\frac{\pi i}{2}(g_1 g_3 + g_2 g_4)\right\}$$

$$\vartheta\begin{bmatrix}g_1 & g_2\\ g_3 & g_4\end{bmatrix}(V, V'; \tau_1, \tau_2, \tau_3).$$

§ 3. Periodentransformation.

Unsere Periodensysteme sind durch die Relationen 3) charakterisiert, die ihrerseits eine Kongruenz festlegen. Herr Hecke[1]) bestimmt alle Transformationen

[1]) Göttinger Nachr. 1915, p. 14.

$$M = (a_1, b_2, c_3, d_4)$$

mit ganzen, rationalen Zahlkoeffizienten und der Determinante 1, welche diese Kongruenz invariant lassen. Jede derartige Transformation M ist für unsere Perioden

$$u : \varrho\, x + \nu'\, y, \quad u' : \varrho'\, x' + \nu\, y'$$

gleichbedeutend mit einer Transformation der x, y in

$$x_1 = \alpha\, x + \beta\, y, \quad y_1 = \gamma\, x + \delta\, y \tag{13}$$

mit algebraischen Koeffizienten der folgenden Art:

α und δ sind ganze Zahlen des Ringes R, β ist eine ganze, durch $\mathfrak{a}$ teilbare Zahl in R und γ eine solche Zahl aus R, dass $\mathfrak{a}\gamma$ ganz ist. Für das Folgende sollen diese Zeichen stets diese Bedeutung besitzen.

Für x′, y′ gelten die Transformationen mit den konjugierten Grössen. Es ist nun zu untersuchen, wie sich die T-Funktionen mit den Perioden

$$\varrho x_1 + \nu' y_1$$

zu den Funktionen der Perioden

$$\varrho x + \nu' y$$

verhalten. Die Determinante der Transformation 13) sei $\eta = \alpha\delta - \beta\gamma$.

Setzt man

$$\Theta\begin{bmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \end{bmatrix}(u, u') = C.\psi(u, u')\, T\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}_{\mu_0}(u, u';\ \mathfrak{a};\ \Omega;\ x, y),$$

$$\psi(u, u') = \mathrm{Exp.}\left\{\frac{\pi i}{\Delta}\left(\frac{\beta}{x\, x_1} u^2\, \Omega' - \frac{\beta'}{x'\, x'_1} u'^2\, \Omega\right)\right\},$$

wo C von u, u′ unabhängig ist, so genügt dieser Ausdruck den folgenden Funktionalgleichungen

$$\Theta\begin{bmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \end{bmatrix}(u + x_1\varrho, u' + x'_1\varrho') = \mathrm{Exp.}\left\{\frac{\pi i}{\Delta}(\varrho\alpha\lambda'_1 - \varrho'\alpha'\lambda_1) + \frac{\pi i}{a\Delta}(\lambda'_2\varrho'\beta' - \lambda_2\varrho\beta)\right.$$

$$\left. + \frac{\pi i}{\Delta}(\varrho^2\alpha\beta\Omega' - \varrho'^2\alpha'\beta'\Omega)\right\}\Theta\begin{bmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \end{bmatrix}(u, u') \tag{14}$$

$$= \mathrm{Exp.}\left\{\frac{\pi i}{\Delta}(\varrho\Lambda'_1 - \varrho'\Lambda_1)\right\}\Theta\begin{bmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \end{bmatrix}(u, u'),$$

14) $$\Theta\begin{bmatrix}\Lambda_1\\ \Lambda_2\end{bmatrix}(u + y_1\nu',\ u' + y'_1\nu) = \mathrm{Exp.}\left\{\frac{\pi i}{a\Delta}(\nu\Lambda'_2 - \nu'\Lambda_2)\right.$$
$$\left. - \frac{\pi i}{\Delta}\left[\frac{2u + y_1\nu'}{x_1}\nu'\Omega\eta' - \frac{2u' + y'_1\nu}{x'_1}\nu\Omega'\eta\right]\right\}\Theta\begin{bmatrix}\Lambda_1\\ \Lambda_2\end{bmatrix}(u, u'),$$

dabei ist

$$\Lambda_1 = \alpha'\lambda_1 - \frac{\lambda'_2\beta'}{a} + \alpha\beta\Omega'\frac{\omega - \omega^2}{\Delta} - \alpha'\beta'\Omega\frac{\omega - \omega'^2}{\Delta}$$

$$\Lambda_2 = -\gamma\lambda'_1 a + \lambda_2\delta - \gamma\delta\Omega' a\frac{\omega'^2 - \omega a}{\Delta} + \gamma'\delta'\Omega a\frac{\omega^2 - a\omega}{\Delta}.$$

Aus den Funktionalgleichungen 14) folgt, dass $\Theta\begin{bmatrix}\Lambda_1\\ \Lambda_2\end{bmatrix}(u, u')$ wiederum vom Typus einer T-Funktion ist und zwar mit der Charakteristik $\begin{bmatrix}\Lambda_1\\ \Lambda_2\end{bmatrix}$ und vom Index $\Omega\eta'$. Es kommen also nur Transformationen mit totalpositiver Determinante η in Frage. Unter dieser Voraussetzung sind die imaginären Teile von $\tau_1 = \frac{y_1}{x_1}$ und $\tau'_1 = \frac{y'_1}{x'_1}$ von denselben Vorzeichen wie die von τ und τ', wodurch die Existenz von $\Theta\begin{bmatrix}\Lambda_1\\ \Lambda_2\end{bmatrix}(u, u')$ gewährleistet ist.

Wir bestimmen $C(\tau_1, \tau_2)$ so, dass $\Theta\begin{bmatrix}\Lambda_1\\ \Lambda_2\end{bmatrix}(u, u')$ den die T-Funktionen definierenden Differentialgleichungen 8) genügt. Es wird

$$C = C_0\sqrt{(\alpha + \beta\tau)(\alpha' + \beta'\tau')},$$

wo C_0 von den Argumenten und Moduln unabhängig ist. Die so bestimmte Funktion

$$\Theta\begin{bmatrix}\Lambda_1\\ \Lambda_2\end{bmatrix}(u, u') = C_0\sqrt{(\alpha + \beta\tau)(\alpha' + \beta'\tau')}\ \psi(u, u').$$

$$T\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{bmatrix}_{\mu_0}(u, u';\ \mathfrak{a};\ \Omega;\ x, y)$$

muss sich mit von u, u', τ und τ' unabhängigen Koeffizienten durch die

$$\mathfrak{N}_1 = \mathrm{Norm}(\mathfrak{c}\eta')$$

linear-unabhängigen Funktionen

$$T\begin{bmatrix}\Lambda_1\\ \Lambda_2\end{bmatrix}_{\bar\mu_0}(u,\ u';\ \mathfrak{a};\ \Omega\eta';\ x_1,\ y_1)$$

ausdrücken lassen. Um die Abhängigkeit von der Charakteristik zu ermitteln, gehen wir aus von

$$\Theta\begin{bmatrix}\Lambda_1{}^0\\ \Lambda_2{}^0\end{bmatrix}(u,\ u') = C_1\sqrt{(\alpha+\beta\tau)(\alpha'+\beta'\tau')}\,\psi(u,u')\,T[o]_{\mu_0}(u,u';\ \mathfrak{a};\ \Omega;\ x,y)$$

$$=\sum_{\bar\mu_0} c_{\bar\mu_0}\,T\begin{bmatrix}\Lambda_1{}^0\\ \Lambda_2{}^0\end{bmatrix}_{\bar\mu_0}(u,\ u';\ \mathfrak{a};\ \Omega\eta';\ x_1,\ y_1),$$

wo $\bar\mu_0$ ein Restsystem nach dem Modul $c\eta'$ durchläuft. Wir vermehren um halbe Perioden

$$x_1\frac{\varrho}{2}+y_1\frac{\nu'}{2}=\frac{x}{2}(\varrho\alpha+\nu'\gamma)+\frac{y}{2}(\varrho\beta+\delta\nu')$$

und formen nach 11) um:

$$\sum_{\bar\mu_0} c_{\bar\mu_0}\,\mathrm{Exp.}\left\{\frac{\pi i}{aN\Delta}\left[\bar\mu_0'\Omega(\lambda_2\delta-a\lambda_1'\gamma)-\bar\mu_0\Omega'(\lambda_2'\delta'-a\lambda_1\gamma')\right]\right\}$$

$$T\begin{bmatrix}\Lambda_1\\ \Lambda_2\end{bmatrix}_{\bar\mu_0}(u,\ u';\ \mathfrak{a};\ \Omega\eta';\ x_1,\ y_1)$$

$$=C_1\sqrt{(\alpha+\beta\tau)(\alpha'+\beta'\tau')}\,\psi(u,u')\,\mathrm{Exp.}\left\{\frac{\pi i}{4a\Delta N}\left[\frac{\Omega}{\eta^2}(\lambda_1'^2a^2\alpha\gamma<\alpha\delta-3\beta\gamma>\right.\right.$$

$$-4\lambda_1'\lambda_2a\alpha\beta\gamma\delta-\lambda_2^2\beta\delta<\alpha\delta+\gamma^2>)-\frac{\Omega'}{\eta'^2}(\lambda_1^2a^2\alpha'\gamma'<\alpha'\delta'-3\beta'\gamma'>$$

$$\left.\left.-4\lambda_1\lambda_2'a\alpha'\beta'\gamma'\delta'-\lambda_2'^2\beta'\delta'<\alpha'\delta'+\gamma'^2>)\right]+\frac{\pi i}{\Delta}\left(\frac{\mu_0'\lambda_2}{aN}\Omega-\frac{\mu_0\lambda_2'}{aN}\Omega'\right)\right\}$$

$$T\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{bmatrix}_{\mu_0}(u,\ u';\ \mathfrak{a};\ \Omega;\ x,\ y),$$

worin C_1 noch eine numerische Konstante ist.

§ 4. Struktur der Gruppe.

Die durch 13) definierten Transformationen $\begin{pmatrix}\alpha\beta\\ \gamma\delta\end{pmatrix}$ mit der Determinante $\eta=\alpha\delta-\beta\gamma$, wo η eine totalpositive Einheit, bilden eine Gruppe Γ. Wir beweisen, dass diese Gruppe Γ eine endliche

Basis besitzt. Das Beweisverfahren stellt eine Verallgemeinerung einer Arbeit von Hurwitz[1]) dar, wo der Satz für ganze Körperzahlen bewiesen wird. Unsere Gruppe Γ geht über jene hinaus, indem erst $\gamma\mathfrak{a}$ ganz sein muss, anderseits ist sie jener gegenüber eingeschränkt, indem $\beta \equiv 0 \pmod{\mathfrak{a}}$ sein muss. Ferner soll

$$\begin{pmatrix}\alpha\beta\\ \gamma\delta\end{pmatrix}(\lambda, \mu) = (\alpha\lambda + \beta\mu,\ \gamma\lambda + \delta\mu) = (\lambda_1, \mu_1)$$

bedeuten, dass die Transformation $\begin{pmatrix}\alpha\beta\\ \gamma\delta\end{pmatrix}$ das Zahlenpaar (λ, μ) in das Paar (λ_1, μ_1) überführt.

Es seien $\lambda \equiv 0\ (\mathfrak{a})$, μ, ν ganze Zahlen in R, und ϱ eine solche, dass $\mathfrak{a}\varrho$ hierin ganz ist. Die Zahlenpaare legen dann einen grössten gemeinsamen Idealteiler

$$\mathfrak{p} = \left(\frac{\lambda}{\mathfrak{a}},\ \mu\right) \text{ und } \mathfrak{q} = (\nu,\ \mathfrak{a}\varrho)$$

fest. Wird dann durch $\begin{pmatrix}\alpha\beta\\ \gamma\delta\end{pmatrix}$, wo nun $\alpha\delta - \gamma\beta = 1$, das Paar (λ, μ) in (λ_1, μ_1), resp. (ν, ϱ) in (ν_1, ϱ_1) überführt, so ist

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 = \left(\frac{\lambda_1}{\mathfrak{a}},\ \mu_1\right) \text{ resp. } \mathfrak{q} = \mathfrak{q}_1 = (\nu_1,\ \mathfrak{a}\varrho_1)$$

und umgekehrt folgt aus der Gleichheit dieser Ideale die Existenz je einer Transformation mit Determinante 1, welche diese Zahlenpaare ineinander überführt. Die kleinere der beiden Zahlen

$$|\,\text{Norm } \lambda\,|,\ |\,\text{Norm } \mu\,|$$

heisse der Rang des Paares (λ, μ). Es gibt nun stets Substitutionen der Art 13), welche (λ, μ) in ein Zahlenpaar niedrigen Ranges überführen, falls der Rang nicht bereits Null war. Aus endlichviel Erzeugenden baut man eine Untergruppe $G^{(2)}$ von Γ auf, von der Beschaffenheit, dass es stets eine Transformation in ihr gibt, die das Paar (λ, μ) vom Range $\mathfrak{R} \neq 0$ in ein Zahlenpaar $(0, \eta)$ vom Range 0 überführt. Hierin ist unter η eine Einheit verstanden und λ und μ werden als relativ prim angenommen.

[1]) A. Hurwitz. Göttinger Nachr. 1895, p. 333.

Ist nun $\begin{pmatrix} \nu\lambda \\ \varrho\mu \end{pmatrix}$ irgend eine Transformation aus Γ, so gilt

$$\begin{pmatrix} \nu\lambda \\ \varrho\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu\eta & \lambda \\ \varrho\eta & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta 0 \\ 0\,1 \end{pmatrix}, \text{ wobei}$$
$$\nu\mu - \lambda\varrho = \eta.$$

Ist ε die Grundeinheit in R, so ist symbolisch

$$\begin{pmatrix} \eta 0 \\ 0\,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon 0 \\ 0\,1 \end{pmatrix}^n.$$

Ist weiter $\begin{pmatrix} \alpha\beta \\ \gamma\delta \end{pmatrix}$ die Transformation, welche (λ, μ) in $(0, \eta)$ überführt, so ist

$$\begin{pmatrix} \alpha\beta \\ \gamma\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu\lambda \\ \varrho\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\nu + \beta\varrho & 0 \\ \gamma\nu + \delta\varrho & \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma_1\eta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta' 0 \\ 0\,\eta \end{pmatrix},$$

wobei letztere Transformationen sich aus

$$\begin{pmatrix} \varepsilon\,0 \\ 0\varepsilon' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1\,a \\ 0\,1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1\omega' \\ 0\,1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1\,0 \\ 1\,1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\omega}{a} & 1 \end{pmatrix}$$

aufbauen lassen.

§ 5. Inäquivalente Substitutionen.

Es sei

$$S = \begin{pmatrix} \alpha\beta \\ \gamma\,\delta \end{pmatrix} \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = \nu$$

eine Substitution unserer Art. Der Wert der Determinante ν heisse die Ordnung der Substitution. Wir bezeichnen dann zwei Substitutionen S, S′ als *äquivalent*, wenn es eine Substitution L der Gruppe G gibt, Substitutionen Γ mit Determinante 1, so dass

$$L\,S = S' \text{ oder } \begin{pmatrix} pq \\ rs \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha\beta \\ \gamma\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1\beta_1 \\ \gamma_1\delta_1 \end{pmatrix}$$

ist. Für vier ganze Zahlen α, β, γ, δ hat Herr Hecke[1]) bereits die Anzahl der inäquivalenten Substitution bestimmt. Es soll nun der analoge Ausdruck als richtig erwiesen werden, falls die vier Zahlen wieder von der nach (13) angegebenen Art sind. Es mögen

[1]) Math. Annalen. Bd. 71, p. 17.

dann die Ideal (α), $\left(\frac{\beta}{\mathfrak{a}}\right)$, $(\mathfrak{a}\gamma)$, (δ) keinen gemeinsamen Teiler besitzen,

$$\left(\alpha, \frac{\beta}{\mathfrak{a}}, \mathfrak{a}\gamma, \delta\right) = 1$$

Es gilt nun der Satz:

Jede Transformation der Determinante ν lässt sich aus $\begin{pmatrix} \nu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *und Transformationen aus G erzeugen.*

Mit Transformationen schlechthin meinen wir stets solche mit Zahlen unserer Art 13).

Der Beweis ist geführt, falls es gelingt, die Zahlen a, b, c, d, p, q, r, s so zu bestimmen, dass

$$\begin{pmatrix} \alpha\beta \\ \gamma\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$ad - bc = ps - qr = 1$$

ist und $a,\ b \equiv 0\ (\mathfrak{a}),\ c\mathfrak{a},\ d,\ p,\ q \equiv 0\ (\mathfrak{a})\ r\mathfrak{a},\ s$ ganz sind.

Es sei nun

$$S = \begin{pmatrix} \alpha\beta \\ \gamma\delta \end{pmatrix},\ \alpha\delta - \beta\gamma = \nu$$

eine Transformation der Ordnung ν und vom Teiler $\mathfrak{f}$, d. h.

$$\mathfrak{f} = \left(\alpha, \frac{\beta}{\mathfrak{a}}, \gamma\mathfrak{a}, \delta\right),$$

also

$$\nu = \mathfrak{f}^2\mathfrak{d}.$$

Inbezug auf diese gegebene Transformation S beweist man folgenden Hilfssatz:

Es sind stets zwei Zahlen a und c angebbar, so dass $a,\ \mathfrak{a}c,\ \lambda,\ \mathfrak{a}\mu$ ganz und

$$\lambda = \alpha a + \beta c \qquad \mu = \gamma a + \delta c$$

werden und ausserdem

$$(\lambda,\ \mu\ \mathfrak{a}) = \mathfrak{f}.$$

Damit lässt sich das folgende Theorem bewahrheiten:

Durch Zusammensetzung mit Transformationen aus G ändert sich der gemeinsame Teiler einer Transformation der Ordnung ν nicht.

Wir rechnen nun alle Substitutionen gleicher Ordnung ν und mit demselben grössten Koeffiziententeiler $\mathfrak{f}$ in dieselbe *Klasse*. Es genügt, solche Klassen zu betrachten, deren Teiler $\mathfrak{f}$ durch keine ganze Zahl ϱ des Körpers teilbar sind.

Es bestimmt sich dann die Anzahl $\psi(\nu, \mathfrak{f})$ der inäquivalenten Substitutionen der Ordnung ν und vom Teiler $\mathfrak{f}$ zu

$$\psi(\nu, \mathfrak{f}) = \psi\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}^2}\right) = \text{Norm}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}^2}\right) \prod\left(1 + \frac{1}{\text{Norm}(\mathfrak{p})}\right),$$

wo $\mathfrak{p}$ alle Primideale von $\frac{\nu}{\mathfrak{f}^2}$ durchläuft.

§ 6. Multiplikation.

In der Theorie der Thetafunktionen führt man die Funktion n^{ter} Ordnung und ϑ (nu) zurück auf die 16 Thetafunktionen erster Ordnung. An Stelle der Ordnung haben wir den Index Ω eingeführt. Die einfachsten T-Funktionen werden solche sein, für welche

$$\text{Norm}\ \Omega\mathfrak{a}' = \text{Norm}\ \mathfrak{c} = \mathfrak{N} = 1$$

ist, d. h. nur eine linear-unabhängige Funktion derselben Charakteristik existiert.

Dann ist aber

$$\mathfrak{c} = 1, \quad \Omega = \frac{1}{\mathfrak{a}'},$$

also $\mathfrak{a}$ ein Hauptideal und es kann $a = -1$ genommen werden, dazu gehören aber die gewöhnlichen, natürlich singulär spezialisierten Thetafunktionen. Man wird also versucht sein, die T-Funktionen durch diese Funktionen einfachster Art auszudrücken, jedoch erweist sich dies als unmöglich, vielmehr sind zu ihrem Aufbau *zwei Grundfunktionen* nötig.

Der Index einer T-Funktion folgt aus ihrer Funktionalgleichung. Das Produkt

$$T\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{bmatrix}(v, v'; \mathfrak{a}, \Omega_1, \tau, \tau') \cdot T\begin{bmatrix}\varkappa_1\\ \varkappa_2\end{bmatrix}(v, v'; \mathfrak{b}; \Omega_2; \tau, \tau')$$

ist daher eine T-Funktion der Charakteristik $\begin{bmatrix}\lambda_1 + \varkappa_1\\ \lambda_2 + \varkappa_2\end{bmatrix}$ und vom

Index $\Omega_1 + \Omega_2$. Entsprechend der zweiten Funktionalgleichung 6) sind diese Funktionen überhaupt nur für derartige Vermehrungen $\beta' \tau$ ihrer Moduln definiert, bei denen β' durch $\mathfrak{a}$, resp. $\mathfrak{b}$, teilbar ist. Das Produkt ist demnach eine Funktion, die zum kleinsten gemeinschaftlichen Vielfach der Ideal $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, also zu

$$\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})}$$

gehört. Die Potenz

$$T^n \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} (v, v'; \mathfrak{a}; \Omega; \tau, \tau')$$

ist daher von der Charakteristik $\begin{bmatrix} n\lambda_1 \\ n\lambda_2 \end{bmatrix}$ vom Index $n\Omega$ und gehört zum Ideal $\mathfrak{a}$.

Ist ϱ eine ganze Körperzahl, so ergibt sich

$$T \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} (\varrho v, \varrho' v'; \mathfrak{a}; \Omega; \tau, \tau')$$

als Funktion von v und v′ betrachtet, als T-Funktion der Charakteristik $\begin{bmatrix} \varrho'\lambda_1 \\ \varrho\,\lambda_2 \end{bmatrix}$ und vom Index $\varrho'^2\Omega$ und als zum Ideal $\mathfrak{a}(\varrho)$ gehörend, d. h. zu derselben Idealklasse.

Das einfache Kompositionsgesetz für die Indizes gestattet uns, die T-Funktionen aus einfachern aufzubauen. Für die Existenz der Funktionen ist notwendig, dass $\Omega = \frac{c}{a'}$ eine total positive Zahl ist. Wir wählen, im Ringe R mit der Basis (1, ω) ganze, total positive Zahlen

$$\omega_1 = c_{11} + c_{12}\,\omega\,, \quad \omega_2 = c_{21} + c_{22}\,\omega$$

und ihre Reihenfolge derart, dass die Determinante

$$c = |c_{ik}| \quad (i, k = 1, 2)$$

positiv wird. Für jede ganze Zahl $\alpha = x + y\,\omega$ des Ringes gilt dann

$$c\,\alpha = (x\,c_{22} - y\,c_{21})\,\omega_1 + (y\,c_{11} - x\,c_{12})\,\omega_2 = m\,\omega_1 + n\,\omega_2\,,$$

d. h. das c fache jeder ganzen Zahl ist mit ganzen, rationalen Koeffizienten durch ω_1, ω_2 darstellbar. Wir wählen als Basis unserer total positiven Zahlen

$$\omega_1 = 1 , \quad \omega_2 = \varepsilon^2 ,$$

wenn ε die Fundamentaleinheit des Ringes R bedeutet, und als zugehörige Grundfunktionen verwenden wir entsprechend

$$\vartheta \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} (v, v', \tau, \tau') \quad \text{und} \quad \vartheta \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} (v\varepsilon, v'\varepsilon', \tau, \tau')$$

mit bezüglich den Indizes 1 und ε^2. Da

$$\text{Norm } 1 = \text{Norm } \varepsilon^2 = +1,$$

so existiert zu jeder Charakteristik nur ein einziges Paar von Grundfunktionen.

Ist Ω ein beliebiger Index, so ist $|a| \cdot \Omega$ ganz und lässt eine Darstellung

$$c \cdot |a| \cdot \Omega = m + n\,\varepsilon^2$$

mit ganzem, rationalem n und m zu und da die linke Seite dieser Gleichung positiv ist, können n und m nicht gleichzeitig negativ sein.

1. $m > 0, \; n = -n' < 0.$

Dann ist

$$T^{|a|c} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} (v, v', \mathfrak{a}; \Omega; \tau, \tau') \, \vartheta^{n'} \begin{bmatrix} \varkappa_1 \\ \varkappa_2 \end{bmatrix} (\varepsilon v, \varepsilon' v'; \tau, \tau')$$

eine Thetafunktion m^{ter} Ordnung, die nach gewöhnlichen Sätzen durch diejenigen erster Ordnung ausdrückbar ist.

2. $m = -m' < 0 , \; n > 0.$

Das Produkt

$$T^{|a|c} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} (v, v'; \mathfrak{a}; \Omega; \tau, \tau') \, \vartheta^{m'} \begin{bmatrix} \varkappa_1 \\ \varkappa_2 \end{bmatrix} (v, v'; \tau, \tau')$$

ist dann eine T-Funktion vom Index $n\varepsilon^2$ und kann, wie $\vartheta^n(v, v')$ durch $\vartheta(v, v')$, nach bekannten Sätzen durch Potenzprodukte von $\vartheta(\varepsilon v, \varepsilon' v')$ ausgedrückt werden.

3. $m > 0, \; n > 0.$

Die Grundeinheit ε genügt einer Gleichung

$$\varepsilon^4 - a\,\varepsilon^2 + 1 = 0,$$

wo

$$\varepsilon^2 + \varepsilon'^2 = a > 0$$

ist und somit ist

$$c \cdot |a| \cdot \mathfrak{L} = m + n\,\varepsilon^2 = (m + na) - n\,\varepsilon^{-2}.$$

Damit kommt man aber auf den Fall 1. zurück, wenn man nur dort ε durch $\varepsilon' = \varepsilon^{-1}$ ersetzt.

Die Multiplikation ordnet sich diesem Prinzip unter, indem man nur den Index $\mathfrak{L}\varrho'^2$ von $T\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{bmatrix}(v\varrho, v'\varrho')$ in der Form $m + n\varepsilon^2$ darzustellen hat und so diese Funktion durch die Grundfunktionen ausdrückt.

Dass in jedem Fall genügend viel unabhängige Funktionen vorhanden sind, folgt unmittelbar aus der gewöhnlichen Theorie der Thetafunktionen. Man hat also ein Prinzip, um in jedem Falle die T-Funktion, oder wenigstens eine mit einem bekannten Faktor multiplizierte Potenz derselben, ganz und rational durch die beiden Grundfunktionen auszudrücken. Auf diese Weise können dann in jedem Körper wirklich Relationen zwischen den singulären Thetafunktionen aufgestellt werden. Die numerische Durchführung hingegen wird mühsam sein, da die in Betracht kommenden Potenzen recht gross werden, immerhin schliessen wir ein Beispiel für den Körper $\sqrt{2}$ an.

Die Grundeinheit ist

$$\varepsilon = 1 + \sqrt{2}$$

und z. B.

$$(2 + \sqrt{2})^2 = 2\,\varepsilon^2 \text{ oder } (\sqrt{2})^2 = 2.$$

Die Funktion

$$T\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}(v\sqrt{2}, -v'\sqrt{2};\ 1;\ 1;\ \tau, \tau')$$

ist vom Index 2 und nach früherem durch 4 unabhängige Funktionen mit demselben Index darstellbar. Wir machen daher den Ansatz

$$c_0\,\vartheta\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}(v\sqrt{2}, -v'\sqrt{2}) = c_1\,\vartheta^2\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}(v, v') + c_2\,\vartheta^2\begin{bmatrix}1\,0\\ 1\,0\end{bmatrix}(v, v')$$
$$+ c_3\,\vartheta^2\begin{bmatrix}1\,1\\ 0\,1\end{bmatrix}(v, v') + c_4\,\vartheta^2\begin{bmatrix}0\,1\\ 1\,1\end{bmatrix}(v, v').$$

Für $v = v' = o$ folgt hieraus

$$c_0 = \vartheta^2 \left[\begin{smallmatrix} o \\ o \end{smallmatrix}\right], \; c_1 = \vartheta \left[\begin{smallmatrix} o \\ o \end{smallmatrix}\right].$$

Durch halbe Periodenvermehrung findet sich nach 11)

$$c_2 = -\vartheta \left[\begin{smallmatrix} 00 \\ 01 \end{smallmatrix}\right], \; c_3 = -\vartheta \left[\begin{smallmatrix} 10 \\ 00 \end{smallmatrix}\right], \; c_4 = -\vartheta \left[\begin{smallmatrix} 10 \\ 01 \end{smallmatrix}\right].$$

Also gilt

$$\vartheta^2 \left[\begin{smallmatrix} o \\ o \end{smallmatrix}\right] \vartheta \left[\begin{smallmatrix} o \\ o \end{smallmatrix}\right] (v\sqrt{2}, -v'\sqrt{2}) = \vartheta \left[\begin{smallmatrix} o \\ o \end{smallmatrix}\right] \vartheta^2 \left[\begin{smallmatrix} o \\ o \end{smallmatrix}\right] (v, v')$$

$$- \vartheta \left[\begin{smallmatrix} 00 \\ 01 \end{smallmatrix}\right] \vartheta^2 \left[\begin{smallmatrix} 10 \\ 10 \end{smallmatrix}\right] (v, v') - \vartheta \left[\begin{smallmatrix} 10 \\ 00 \end{smallmatrix}\right] \vartheta^2 \left[\begin{smallmatrix} 11 \\ 01 \end{smallmatrix}\right] (v, v') - \vartheta \left[\begin{smallmatrix} 10 \\ 01 \end{smallmatrix}\right] \vartheta^2 \left[\begin{smallmatrix} 01 \\ 11 \end{smallmatrix}\right] (v, v').$$

Nimmt man auch die übrigen halben Periodenvermehrungen hierin vor, so folgen 12 analoge Gleichungen, aus denen sich Relationen zwischen den Nullwerten ergeben. Diese Gleichungen können unmittelbar der folgenden Tabelle entnommen werden. In der ersten Kolonne ist die Charakteristik von $\vartheta \left[\begin{smallmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{smallmatrix}\right] (v\sqrt{2}, -v'\sqrt{2})$ angegeben und dann die der 4 übrigen Funktionen. Die den Charakteristiken beigegebenen Vorzeichen sind dieser obigen Ausgangsrelation gegenüber gemeint und rühren von

$$\text{Exp} \frac{\pi i}{\Delta} (\varrho \lambda'_1 - \varrho' \lambda_1)$$

her.

0000	0000	1010	1101	0111	Periodenänderung	
0000	1000	0010	0101	1111	$\sqrt{2}$	
1000	0100	1110	1001	0011	1	
0001	0010	-1000	-1111	0101		-1
0000	0001	1011	-1100	-0110		$\sqrt{2}$
1000	1100	0110	0001	1011	$1+\sqrt{2}$	
0000	1001	0011	-0100	-1110	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
0001	0011	-1001	1110	-0100		$-1+\sqrt{2}$
1001	1110	-0100	-0011	1001	$1+\sqrt{2}$	-1
0001	1011	-0001	0110	-1100	$\sqrt{2}$	$-1+\sqrt{2}$
1001	1111	-0101	0010	-1000	$1+\sqrt{2}$	$-1+\sqrt{2}$
1001	0110	-1100	-1011	0001	1	-1
1000	0101	1111	-1000	-0010	1	$\sqrt{2}$

Die letzte dieser Relationen würde also heissen

$$\vartheta^2\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}10\\00\end{bmatrix}(v\sqrt{2}, -v'\sqrt{2}) = \vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\vartheta^2\begin{bmatrix}01\\01\end{bmatrix}(v, v')$$

$$-\vartheta\begin{bmatrix}00\\01\end{bmatrix}\vartheta^2\begin{bmatrix}11\\11\end{bmatrix}(v, v') + \vartheta\begin{bmatrix}10\\00\end{bmatrix}\vartheta^2\begin{bmatrix}10\\00\end{bmatrix}(v, v') + \vartheta\begin{bmatrix}10\\01\end{bmatrix}\vartheta^2\begin{bmatrix}00\\10\end{bmatrix}(v, v')$$

und für die Nullwerte

$$\vartheta^2{}_5\,\vartheta_{01} = -\vartheta_{34}\,\vartheta^2{}_{14} + \vartheta^3{}_{01} + \vartheta_2\,\vartheta^2{}_{12}.$$

Curriculum vitae.

Am 22. Juli 1892 wurde ich, Otto Paul Buchner, als Sohn des Joseph Buchner († 1913), Wirt, und seiner Frau Adèle, geb. Werdenberg († 1913), geboren. Meine Jugendzeit verbrachte ich in meiner Heimat Basel. Ich durchlief Primar-, untere und obere Realschule, letztere verliess ich im Sept. 1911 mit dem Zeugnis der Reife. Ich studierte an hiesiger Universität Basel vom Okt. 1911 bis März 1914, und zwar widmete ich mich der Mathematik, Physik und Chemie. Bis zum Ausbruch des Krieges bekleidete ich eine Privatlehrerstelle. Im Februar 1915 bestand ich das Mittellehrerexamen. Während des Sommersemesters 1915 besuchte ich die Universität Göttingen. Im April 1916 konnte ich mich wieder in Basel immatrikulieren und übernahm unter der Leitung von Herrn Prof. Dr. Hecke eine Dissertation.

Gern gedenke ich der Vorlesungen, Übungen und Praktika, die ich bei folgenden Herren Professoren und Dozenten besuchte:

in Basel: Fueter, Bieberbach, Hecke, Spiess, Matthies, Hagenbach, Fichter, Rupe, Zickendraht, Riggenbach, Häberlin, Joël, Heman, Veillon und Flatt;

in Göttingen: Geh. Klein, Geh. Hilbert, Carathéodory, Debye, Prandtl, Coehn.

Zu ganz besonderem Danke fühle ich mich Herrn Prof. Dr. Hecke verpflichtet für die zahlreichen Ratschläge und Anregungen, die er mir während meiner Arbeit stetsfort erteilt hat.